

1° Prueba de Cátedra de Mat 116.

Lunes 13 de septiembre, 2004

Indicaciones:

- Todos los materiales a utilizar durante la prueba son de uso individual.
 - Dispone de 10 minutos para hacer preguntas sobre la redacción de los ejercicios.
 - El tiempo total para resolver la prueba es de 90 minutos.
 - Cada pregunta tiene 15 puntos en total.
 - Justifique todas sus respuestas.
 - Sea claro y ordenado en sus desarrollos.
 - NO se permite el uso de calculadora gráfica ni tampoco de formulario.
1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(6, -4)$ y que es tangente a la curva de ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 35 = 0$
 2. Grafique la siguiente región indicando los puntos de intersección :
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4y^2 - x^2 - 24y - 2x + 31 \geq 0 \wedge x - y + 3 \leq 0\}$$
 3. Dos autos parten desde un mismo punto formando un ángulo α . Las velocidades de los autos son constantes iguales a 50 [Km/Hr] y 80 [Km/Hr] respectivamente. Determine el valor de α si pasadas 2 [Hr] la distancia que separa a los autos es de 100 [Km] .
 4. Demuestre la siguiente identidad trigonométrica, indicando el dominio:

$$\frac{1 + \cos(2\theta) + \cos(\theta)}{\sin(2\theta) + \sin(\theta)} = \cot(\theta)$$

Desarrollo

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(6, -4)$ y que es tangente a la curva de ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 35 = 0$

R: La curva es la circunferencia $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 37$ Luego $C = (-1, 1), r = \sqrt{37}$

Sea $T: y = mx + b$ la ecuación de la recta tangente a la circunferencia. Así:

$$(6, -4) \in T, b = -4 - 6m \Rightarrow$$

$$d((-1, 1), T) = \frac{|1 + m + 4 + 6m|}{\sqrt{1 + m^2}} = \sqrt{37} \Rightarrow$$

$$\frac{(5 + 7m)^2}{1 + m^2} = 37 \Rightarrow$$

$$\frac{(5 + 7m)^2}{1 + m^2} = 37 \Rightarrow$$

$$6m^2 + 35m - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$(6m - 1)(m + 6) = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{6} \vee m = -6$$

Si $m = \frac{1}{6}$ entonces $b = -4 - 6 \cdot \frac{1}{6} = -5$. Luego $T_1: y = \frac{1}{6}x - 5$

Si $m = -6$ entonces $b = -4 - 6 \cdot -6 = 32$, de modo que $T_2: y = -6x + 32$

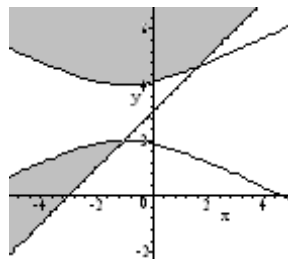
2. Grafique la siguiente región indicando los puntos de intersección:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4y^2 - x^2 - 24y - 2x + 31 \geq 0 \wedge x - y + 3 \leq 0\}$$

R: $C_1: \frac{(y-3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$ Corresponde a una hipérbola de centro $(-1, 3)$ de eje transversal paralelo al eje y . Para calcular los puntos de intersección resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 4y^2 - x^2 - 24y - 2x + 31 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow x = \frac{5}{3} \vee x = -1$$

Así los puntos de intersección son $\left(\frac{5}{3}, \frac{14}{3}\right)$ y $(-1, 2)$. La gráfica buscada es:



$(-1, 0)$ satisface $4y^2 - x^2 - 24y - 2x + 31 \geq 0$ Región interior de la hipérbola $(0, 0)$ satisface $x - y + 3 \leq 0$ Semiplano superior

3. Dos autos parten desde un mismo punto formando un ángulo α . Las velocidades de los autos son constantes iguales a 50 [Km/Hr] y 80 [Km/Hr] respectivamente. Determine el valor de α si pasada 2 [Hr] la distancia que separa a los autos es de 100 [Km]

$$\text{R: } 100^2 = 100^2 + 160^2 - 2 \cdot 100 \cdot 160 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha \approx 0,8 \Rightarrow \alpha \approx 36,87^\circ$$

4. Demuestre la siguiente identidad trigonométrica, indicando el dominio:

$$\frac{1 + \cos(2\theta) + \cos(\theta)}{\sin(2\theta) + \sin(\theta)} = \cot(\theta)$$

R: Las restricciones son:

$$\sin(2\theta) + \sin(\theta) \neq 0 \wedge \sin(\theta) \neq 0 \Rightarrow$$

$$2\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta) \neq 0 \wedge \sin(\theta) \neq 0 \Rightarrow$$

$$2\cos(\theta) + 1 \neq 0 \wedge \sin(\theta) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\cos(\theta) \neq -1/2 \wedge \sin(\theta) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\theta \neq 2\pi/3 + 2k\pi \wedge \theta \neq 4\pi/3 + 2k\pi \wedge \theta \neq k\pi$$

Así el conjunto restricción es: $\mathbb{R} - \{2\pi/3 + 2k\pi; 4\pi/3 + 2k\pi; k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Ahora, para la demostración, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos(2\theta) + \cos(\theta)}{\sin(2\theta) + \sin(\theta)} &= \\ \frac{1 + 2\cos^2(\theta) - 1 + \cos(\theta)}{2\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)} &= \\ \frac{(2\cos(\theta) + 1)\cos(\theta)}{(2\cos(\theta) + 1)\sin(\theta)} &= \cot(\theta) \end{aligned}$$